Hermann-Vöchting-Gymnasium Blomberg

Schulinterner Lehrplan Mathematik

Sekundarstufe II

(Fassung vom 11.09.2024)

Inhalt

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Das Hermann-Vöchting-Gymnasium ist das einzige Gymnasium der Stadt Blomberg. Es ist eine Schule mit ländlichem Charakter im Grenzbereich von Ostwestfalen und Niedersachsen. Das HVG ist in der Sekundarstufe I in der Regel vierzügig und wird als Halbtagsgymnasium geführt.

In die Einführungsphase der Sekundarstufe II wurden in den letzten Jahren regelmäßig etwa 20 Schülerinnen und Schüler neu aufgenommen, überwiegend aus den umliegenden Sekundarschulen, und im Rahmen der Blockung auf die eingerichteten Kurse verteilt.

In der Regel werden in der Einführungsphase fünf parallele Grundkurse eingerichtet, aus denen sich für die Q-Phase zwei Leistungskurse entwickeln. Der Unterricht findet im 45-Minuten-Takt statt, die Kursblockung sieht grundsätzlich für Grundkurse eine, für Leistungskurse zwei Doppelstunden vor.

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu bieten, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet. Insbesondere leistet das Fach Mathematik einen wichtigen Beitrag zum MINT-Schwerpunkt am Hermann-Vöchting-Gymnasium.

Durch ein fachliches Förderprogramm im Rahmen von Vertiefungskursen, begleitet durch regelmäßige Sprechstunden der Lehrkräfte, werden Schülerinnen und Schüler mit Übergangs- und Lernschwierigkeiten intensiv unterstützt. Die Schülerinnen und Schüler können an mehreren Tagen in der Woche die Angebote des „Matheraumes“ nutzen, welcher ein Treffpunkt für Schülerinnen und Schüler sein soll, die Schwierigkeiten und Probleme bei mathematischen Fragestellungen und Themen aus dem Unterricht haben. Dort werden sie durch Fachlehrkräfte individuell unterstützt. Insbesondere soll im Matheraum das selbständige und kooperative Lernen gefördert werden.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben (Matheolympiade, Känguru-Wettbewerb usw.) im Fach Mathematik motiviert.

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass – wo immer möglich – mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug und fachübergreifend vermittelt werden.

In der Sekundarstufe I wird ein wissenschaftlicher Taschenrechner ab Klasse 7 verwendet, dynamische Geometrie-Software und Tabellenkalkulation werden an geeigneten Stellen im Unterricht genutzt, der Umgang mit ihnen eingeübt. Dazu stehen in der Schule zwei PC-Unterrichtsräume sowie diverse IPad-Koffer und -Schränke zur Verfügung. **Ab der Einführungsphase wird der CAS-Rechner TI-Nspire eingeführt.**

Für die **Sekundarstufe II/ Einführungsphase** ist das Lehrwerk **Elemente der Mathematik (Westermann-Verlag)** eingeführt.

Momentan besteht die Fachschaft Mathematik aus folgenden Lehrkräften: Frau Brauckschulze, Frau Dubielzig, Herr Dux, Frau Gartmann, Herr Gerdelmann, Frau Heinze, Frau Hillebrand, Herr Holste, Herr Jürgens auf der Haar, Frau Kortemeier, Frau Meier, Frau Mittelgöker, Frau Möller, Herr Volz

Fachvorsitzende sind momentan Frau Möller und Herr Volz.

2 Entscheidungen zum Unterricht

Die Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan sind die vereinbarte Planungsgrundlage des Unterrichts. Sie bilden den Rahmen zur systematischen Anlage und Weiterentwicklung sämtlicher im Kernlehrplan angeführter Kompetenzen, setzen jedoch klare Schwerpunkte. Sie geben Orientierung, welche Kompetenzen in einem Inhaltsfeld besonders gut entwickelt werden können und berücksichtigen dabei die obligatorischen Inhaltsfelder und inhaltlichen Schwerpunkte.

2.1 Unterrichtsvorhaben

Die Darstellung der Unterrichtsvorhaben im schulinternen Lehrplan besitzt den Anspruch, sämtliche im Kernlehrplan angeführten Kompetenzen abzudecken. Dies entspricht der Verpflichtung jeder Lehrkraft, Schülerinnen und Schülern Lerngelegenheiten zu ermöglichen, so dass alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans von ihnen erfüllt werden können.

Die entsprechende Umsetzung erfolgt auf zwei Ebenen: der Übersichts- und der Konkretisierungsebene.

Im „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.1) wird die Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Damit wird jedoch keine feste chronologische Reihenfolge vorgegeben.

Das Übersichtsraster dient dazu, den Kolleginnen und Kollegen einen schnellen Überblick über die Zuordnung der Unterrichtsvorhaben zu den einzelnen Jahrgangsstufen sowie den im Kernlehrplan genannten Kompetenzen, Inhaltsfeldern und inhaltlichen Schwerpunkten zu verschaffen. Um Klarheit für die Lehrkräfte herzustellen und die Übersichtlichkeit zu gewährleisten, werden in der Kategorie „Kompetenzen“ an dieser Stelle nur die übergeordneten Kompetenzerwartungen ausgewiesen, während die konkretisierten Kompetenzerwartungen erst auf der Ebene konkretisierter Unterrichtsvorhaben Berücksichtigung finden. Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Um Spielraum für Vertiefungen, individuelle Förderung, besondere Schülerinteressen oder aktuelle Themen zu erhalten, wurden im Rahmen dieses schulinternen Lehrplans ca. 75 Prozent der Bruttounterrichtszeit verplant.

Während der Fachkonferenzbeschluss zum „Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben“ zur Gewährleistung vergleichbarer Standards sowie zur Absicherung von Kurswechslern und Lehrkraftwechseln für alle Mitglieder der Fachkonferenz Bindekraft entfalten soll, besitzt die Ausweisung „konkretisierter Unterrichtsvorhaben“ (Kapitel 2.1.2) empfehlenden Charakter. Begründete Abweichungen von den vorgeschlagenen Vorgehensweisen bezüglich der konkretisierten Unterrichtsvorhaben sind im Rahmen der pädagogischen Freiheit der Lehrkräfte jederzeit möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden. Dies ist durch entsprechende Kommunikation innerhalb der Fachkonferenz zu gewährleisten.

2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase (EF)	
<u>*Unterrichtsvorhaben EF-I:*</u> **Thema:** Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1) **Zentrale Kompetenzen:** Werkzeuge nutzen Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** Koordinatisierung des Raumes Vektoroperationen Eigenschaften von Vektoren **Zeitbedarf:** 12 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben EF-II :*</u> **Thema:** Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum (E-G2) **Zentrale Kompetenzen:** Werkzeuge nutzen Kommunizieren **Inhaltsfelder:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte:** Vektoroperationen Eigenschaften von Vektoren Geraden und Strecken Lagebeziehungen von Geraden (auch Schnittpunkte) **Zeitbedarf:** 15 Std.

<u>*Unterrichtsvorhaben EF-III :*</u> **Thema:** Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (E-A1) **Zentrale Kompetenzen:** Modellieren Werkzeuge nutzen **Inhaltsfelder:** Funktionen und Analysis (A) Lineare Algebra (G) **Inhaltliche Schwerpunkte:** Funktionen als mathematische Modelle Lineare Gleichungssysteme **Zeitbedarf:** 12 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben EF-IV:*</u> **Thema:** Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern (E-A2) **Zentrale Kompetenzen:** Modellieren Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** Eigenschaften von Funktionen Transformationen **Zeitbedarf:** 12 Std.

Einführungsphase (EF) - Fortsetzung	
Unterrichtsvorhaben EF-V : **Thema:** Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3) **Zentrale Kompetenzen:** Modellieren Argumentieren **Inhaltsfelder:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** Grundverständnis des Ableitungsbegriffs Differentialrechnung Tangente, Sekante, Normale, Steigungs-winkel **Zeitbedarf:** 18 Std.	*Unterrichtsvorhaben EF-VI:* **Thema:** Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4) **Zentrale Kompetenzen:** Modellieren Argumentieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** Differentialrechnung Bezug und Interpretation der ersten drei Ableitungen **Zeitbedarf:** 18 Std.

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

E-Phase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	E-G1	12
II	E-G2	15
III	E-A1	12
IV	E-A2	12
V	E-A3	18
VI	E-A4	18
	Summe:	87
Q1 Grundkurse (alt)		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-A1	9
II	Q-GK-A2	15
III	Q-GK-G1	9
IV	Q-GK-G2	9
V	Q-GK-G3	6
VI	Q-GK-G4	9
VII	Q-GK-A3	9
VIII	Q-GK-A4	12

	Summe:	78
Q2 Grundkurse (alt)		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-GK-S1	6
II	Q-GK-S2	9
III	Q-GK-S3	9
IV	Q-GK-S4	9
V	Q-GK-A5	9
VI	Q-GK-A6	12
	Summe:	54

Q1 Leistungskurse (alt)		
Unterrichtsvorhaben	**Thema**	**Stundenzahl**
I	Q-LK-A1	20
II	Q-LK-A2	20
III	Q-LK-G1	10
IV	Q-LK-G2	10
V	Q-LK-G3	10
VI	Q-LK-G4	10
VII	Q-LK-A3	10
VIII	Q-LK-A4	20
IX	Q-LK-S1	5
X	Q-LK-S2	10
XI	Q-LK-S3	5
	Summe:	130
Q2 Leistungskurse (alt)		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-A5	20
II	Q-LK-A6	20
III	Q-LK-S4	10
IV	Q-LK-S5	10
V	Q-LK-S6	10
VI	Q-LK-G5	10
VII	Q-LK-G6	10
	Summe:	90

2.1.2 Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

Planungsgrundlage: 120 U.-Std. (3 Stunden pro Woche, 40 Wochen), davon 75% entsprechen ca. 90 U.-Std. pro Schuljahr.

Unterrichtsvorhaben I: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1)*	*Ca. 12 U.-Std.*
Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) • Einführung und Umgang CAS • Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren • Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar (z.B.: Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen) • - Eigenschaften von Vektoren: Länge (z.B.: Streckenlängen), Kollinearität (Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis)	
Zu entwickelnde Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler…*	***Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen***
Konkretisierte Kompetenzerwartungen (G-1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum, (G-2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar, (G-3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen (G-4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras, (G-5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität, (G-6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach. ***Prozessbezogene Kompetenzen:*** (Ope-3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, (Ope-4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, (Ope-8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, (Ope-11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (Ope-12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,	*Zur Umsetzung:* Schulung Raumvorstellung sowie Symbolsprache (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) Verkettungen von Verschiebungen führen grafisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar. *Materialhinweis:* Die Koordinatisierung des Raumes kann z.B. gewinnbringend im Kontext einer Spidercam-Steuerung entwickelt bzw. vertieft werden (vgl. Sinus-Transfer-Materialien zur Spidercam). - Rückbezug Schrägbilder und Darstellung im CAS *Zur Vernetzung:* - Physik: Kräfte und ihre Addition - Satz des Pythagoras → Klasse 9 - Besondere Vierecke → 6 - Körper → 9/10 *Bezug zur Medienkompetenzrahmen:*

(Mod-1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, (Mod-2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, (Pro-2) analysieren und strukturieren die Problemsituation, (Pro-3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), (Arg-5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, (Kom-4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, (Kom-6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, (Kom-7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, (Kom-8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.	- Digitale Werkzeuge (MKR 1.2): 3d-Darstellungen mithilfe CAS (G-2; Kom-7; Kom-8)

Unterrichtsvorhaben II: *Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum (E-G2)*	*Ca. 15 U.-Std.*
Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) • Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar • Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität • Geraden und Strecken: Parameterform • Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend • Schnittpunkte: Geraden	
Zu entwickelnde Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler…*	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Konkretisierte Kompetenzerwartungen (G3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit, (G6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach, (G7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar, (G8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext, (G9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden, (G10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge, (G11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen, (G12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge. ***Prozessbezogene Kompetenzen:*** (Ope-1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, (Ope-2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, (Ope-4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, (Ope-5) führen Darstellungswechsel sicher aus, (Ope-7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, (Ope-9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, (Ope-11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (Ope-12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen und zum Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,	*Zur Umsetzung:* Beschreiben geometrischer Objekte mit Rückbezug auf Punkte im Raum daran anschließend lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor ⇨ Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbeziehen und diskutieren Beschreibung einer Gerade durch zwei Punkte ⇨ Wechsel zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) Lagebeziehungen von Geraden untersuchen und systematisieren Einsatz des CAS zur Lösung komplexere LGS *Zur Vernetzung:* - Punkte im Raum → EF I - Satz von Pythagoras → 9 - Körper → 9/10 - LGS → 8 - algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gaußalgorithmus) → Qualifikationsphase, Steckbriefaufgaben *Bezug zur Medienkompetenzrahmen:* - Digitale Werkzeuge (MKR 1.2): 3d-Darstellungen mithilfe CAS (Ope-11; Ope-13; Pro-6; Kom-7)

(Ope-13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, (Mod-3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (Mod-4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, (Mod-5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, (Mod-6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (Mod-8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, (Mod-9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, (Pro-4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, (Pro-5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), (Pro-6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, (Pro-8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, (Pro-9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, (Pro-10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, (Pro-12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, (Pro-13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen, (Arg-1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (Arg-4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, (Arg-5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, (Arg-6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, (Arg-8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), (Arg-9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, (Arg-10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,	

(Arg-11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten, (Arg-12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit, (Kom-5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, (Kom-7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, (Kom-9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent, (Kom-12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung, (Kom-13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.	

<table>
<tr><td colspan="2">Unterrichtsvorhaben III: Beschreibung der Eigenschaften von Funktionen (E-A1) Ca. 12 U.-Std.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funktionen und Analysis (A)
• Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen
• Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
⇨ jeweils mit und ohne Hilfsmittel</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler…</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Konkretisierte Kompetenzerwartungen
(A1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
(A2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel.

Prozessbezogene Kompetenzen:
(Ope-1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
(Ope-3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
(Ope-5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
(Ope-6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
(Ope-7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
(Ope-11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
(Ope-12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen, Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
(Pro-1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
(Pro-4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
(Pro-7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
(Pro-10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
(Pro-11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
(Arg-2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,</td><td>Zur Umsetzung:
Untersuchung und Systematisierung von Funktonen mithilfe eines CAS (Darstellungswechsel zwischen Graph, Tabelle, Funktions-vorschrift)
Von Potenzfunktionen zu ganzrationalen Funktionen erweitern
Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des CAS (Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen, Wertetabellen)

Zur Vernetzung:
Berechnung von Nullstellen → 8/9
Schnittpunkte → 8
Symmetrie → 9

Materialhinweis:
Material „EF-A1 Funktionsuntersuchung mit dem MMS“ im Lehrplannavigator

Bezug zur Medienkompetenzrahmen:
- Digitale Werkzeuge (MKR 1.2): 3d-Darstellungen mithilfe CAS (Ope-11; Ope-12)</td></tr>
</table>

(Arg-3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, (Arg-13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, (Kom-3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, (Kom-5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, (Kom-6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, (Kom-7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, (Kom-8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, (Kom-10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, (Kom-11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.	

Unterrichtsvorhaben IV: *Transformationen von Funktionen und Einfluss von Parametern (E-A2)*	*Ca. 12 U.-Std.*
Funktionen und Analysis (A) • Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ • Transformationen: Spiegelungen an den Koordinatenachsen, Verschiebungen, Streckungen	
Zu entwickelnde Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler…*	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Konkretisierte Kompetenzerwartungen (A3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion), (A4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter. ***Prozessbezogene Kompetenzen:*** (Ope-11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (Ope-12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen und erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, (Mod-1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, (Mod-2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, (Mod-3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (Mod-5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, (Arg-1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (Arg-2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, (Arg-3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, (Arg-13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, (Kom-1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, (Kom-7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,	*Zur Umsetzung:* z.B. entdeckender Einstieg im anwendungsbezogenen Kontext („Temperaturmittelwerte im Jahresverlauf“ oder „Sonnenschein-dauer“) → Auswertung mit CAS Transformationen ausgehend von Scheitelpunktform auf Sinus-, Potenz- und ganzrationale Funktionen erweitern *Zur Vernetzung:* Verschiebung, Streckung, Stauchung Parabel → 9 Transformation von Funktionen → 10 Amplitude, Periode der Sinusfunktion → 10 *Materialhinweis:* Material „EF-A2 Beschreibung periodischer Vorgänge mithilfe der Sinusfunktion“ im Lehrplannavigator *Bezug zur Medienkompetenzrahmen:* - Digitale Werkzeuge (MKR 1.2): 3d-Darstellungen mithilfe CAS (Ope-11; Ope-12; Kom-7)

(Kom-8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.	

Unterrichtsvorhaben V: *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)*	*Ca. 18 U.-Std.*
Funktionen und Analysis (A) • Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte • Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel	
Zu entwickelnde Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler…*	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Konkretisierte Kompetenzerwartungen (A5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext, (A6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen, (A7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim\limits_{x \to \ldots} f(x)$, (A8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen, (A9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel, (A10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion), (A11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen, (A13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten. ***Prozessbezogene Kompetenzen:*** (Ope-11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, (Ope-12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen und erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, (Mod-1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, (Mod-2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor, (Mod-3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (Mod-5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, (Arg-1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (Arg-2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,	*Zur Umsetzung:* Erarbeitung im Anwendungskontext (z.B.: Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, …) anknüpfend an Sekanten Z.B. Weg-Zeit-Funktion bei Fall- und Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen, sowie (geometrische) Steigung im Sachzusammenhang Nutzung des CAS zur Darstellung des Grenzprozesses beim Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) Einführung der Limes-Schreibweise ($x \to x_0$, h-Methode) Nutzung des CAS zur Herleitung der Ableitungsregeln für höhere Potenzen Vermuten, Begründen und Präzisieren von Aussagen beim Interpretieren von Graphen (Argumentieren) *Zur Vernetzung:* Tangente und Sekante → 9 Erweiterung des Tangentenbegriffs aus der 9 *Bezug zur Medienkompetenzrahmen:* - Digitale Werkzeuge (MKR 1.2): 3d-Darstellungen mithilfe CAS (Ope-11; Ope-12; Kom-7)

(Arg-3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, (Arg-13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, (Kom-1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen, (Kom-7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, (Kom-8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.	

Unterrichtsvorhaben VI: *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (EA-4)* *Ca. 18 U.-Std.*	
Funktionen und Analysis (A) • Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte • Bezug und Interpretation der ersten drei Ableitungen zur Ursprungsfunktion ⇨ Monotonieintervalle ⇨ Notwendige und hinreichende Bedingung, Vorzeichenwechselkriterium, Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie)	
Zu entwickelnde Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler…*	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Konkretisierte Kompetenzerwartungen (A5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext, (A9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel, (A12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung, (A13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten, (A14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln, (A15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich, (A16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten, (A17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung, (A18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten, (A19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganz-rationalen Funktionen. ***Prozessbezogene Kompetenzen:*** (Ope-1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, (Ope-2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, (Ope-4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, (Ope-5) führen Darstellungswechsel sicher aus, (Ope-7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, (Ope-9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, (Ope-11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,	*Zur Umsetzung:* Nutzung des CAS zur Herleitung der Ableitungsregeln Innermathematische und anwendungsbezogene Betrachtung *Zur Vernetzung:* Scheitelpunkt quadratischer Funktionen → 9 Steigungsverhalten Exponentialfunktionen → 9/10 Ableitungsregeln Potenzfunktionen EF-V *Bezug zur Medienkompetenzrahmen:* - Digitale Werkzeuge (MKR 1.2): 3d-Darstellungen mithilfe CAS (Ope-7; Ope-11; Ope-12; Ope-13; Pro-6; Kom-7)

(Ope-12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen und zum Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, (Ope-13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, (Mod-3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, (Mod-4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, (Mod-5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, (Mod-6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, (Mod-8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, (Mod-9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung, (Pro-4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, (Pro-5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern), (Pro-6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, (Pro-8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, (Pro-9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, (Pro-10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, (Pro-12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, (Pro-13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen, (Arg-1) stellen Fragen, die für die Mathematik und stellen charakteristisch sind, begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, (Arg-4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, (Arg-5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, (Arg-6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,	

(Arg-8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen), (Arg-9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, (Arg-10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind, (Arg-11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten, (Arg-12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit, (Kom-5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, (Kom-7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, (Kom-9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent, (Kom-12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung, (Kom-13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.	

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Optimierungsprobleme (Q-GK-A1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
• verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten

Prozessbezogene Kompetenzen:
<u>Modellieren</u>
Die Schülerinnen und Schüler
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor.(Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
• finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation (Erkunden)
• wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen (Erkunden)</td><td>Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“

Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Es wird deshalb empfohlen, den Lernenden hinreichend Zeit zu geben, u. a. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen.
An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).
Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) sollte unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht werden.
Abschließend empfiehlt es sich, ein Problem zu behandeln, das die Schülerinnen und Schüler nur durch systematisches Probieren oder anhand des Funktionsgraphen lösen können: Aufgabe zum „schnellsten Weg“.

Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung kann</td></tr>
</table>

• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern …) *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung) erfolgen

Thema: *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit ganzrationalen Funktionen (Q-GK-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. *Designobjekte oder architektonische Formen können zum Anlass genommen werden, die Funktionsklassen zur Modellierung auf ganzrationale Funktionen 3. oder 4. Grades zu erweitern und über gegebene Punkte, Symmetrieüberlegungen und Bedingungen an die Ableitung Gleichungen zur Bestimmung der Parameter aufzustellen. Hier bieten sich nach einem einführenden Beispiel offene Unterrichtsformen (z. B. Lerntheke) an.*

• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (z.B. Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. *Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser" zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.*

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-GK-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*	Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier nach Möglichkeit Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Außer einer kurzen Phase, in der die Schachtelung durch Ober- und Untersummen eingeführt wird, sollten die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (Quadraturverfahren) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-GK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern geometrisch-anschaulich den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate • bestimmen Flächeninhalte mit Hilfe von bestimmten Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-GK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden, dass für die Änderungsrate ein Funktionsterm gegeben ist. *Die Graphen der Änderungsrate und der Bestandsfunktion können die Schülerinnen und Schüler z.B. mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen.* Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen können von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet werden. (z. B. durch ein sog. Funktionendomino) In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Gesamtbeständen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen

	Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen.

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen (Q-GK-A5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion • untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze • interpretieren Parameter von Funktionen im Anwendungszusammenhang • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen: - natürliche Exponentialfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren).* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler*	*Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens sollte eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen stehen (Wachstum und Zerfall).* Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle kann zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate führen. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle. Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

• Verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen … grafischen Messen von Steigungen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus • nutzen […] digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-GK-A6)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

untersuchen Wachstums- und Zerfallsvorgänge mithilfe funktionaler Ansätze
interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext
bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
- Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten
bilden in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung)
wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an
wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen an
bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu (Mathematisieren)

</td><td>
Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. Als Beispiel für eine Summenfunktion kann eine Kettenlinie modelliert werden. Auch beschränktes Wachstum kann an einem Beispiel untersucht werden.

An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen erarbeitet. In diesem Zusammenhang kann die Produktregel zum Ableiten eingeführt werden.

In diesen Kontexten ergeben sich ebenfalls Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird.

Parameter werden nur in konkreten Kontexten und nur exemplarisch variiert (keine systematische Untersuchung von Funktionenscharen). Dabei werden z. B. zahlenmäßige Änderungen des Funktionsterms bezüglich ihrer Auswirkung untersucht und im Hinblick auf den Kontext interpretiert.
</td></tr>
</table>

• beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*	

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-GK-G1)</td></tr>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar
• interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler</td><td>Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und können z. B. dynamisch mit DGS dargestellt werden. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. Weiterhin kann auch der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte geübt werden.

Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet hier z. B. eine zusätzliche Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.</td></tr>
</table>

• nutzen Geodreiecke […] geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum	

Thema: *Lineare Algebra als Schlüssel zur Lösung von geometrischen Problemen (Q-GK-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Ebenen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. [...] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen***	Als Einstiegskontext für die Parametrisierung einer Ebene kann z. B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten dienen. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen. *Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, können durch Einschränkung des Definitionsbereichs Parallelogramme und Dreiecke beschrieben und auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden, die über die Kompetenzerwartungen des KLP hinausgehen.* In diesem Unterrichtsvorhaben können Problemlösekompetenzen erworben werden, indem sich heuristische Strategien bewusst gemacht werden (eine planerische Skizze anfertigen, die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt beschreiben, geometrische Hilfsobjekte einführen, bekannte Verfahren zielgerichtet einsetzen und in komplexeren Abläufen kombinieren und unterschiedliche Lösungswege kriteriengestützt vergleichen). Punktproben sowie die Berechnung von Spurgeraden in den Grundebenen und von Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen führen zunächst noch zu einfachen Gleichungssystemen. Die Achsenabschnitte erlauben eine Darstellung in einem räumlichen Koordinatensystem. Die Untersuchung von Schattenwürfen eines Mastes auf eine Dachfläche z. B. motiviert eine Fortführung der systematischen Auseinandersetzung (Q-GK-A2) mit linearen Gleichungssystemen, mit der Matrix-Vektor-Schreibweise und mit dem Gauß-Verfahren. Die Lösungsmengen werden mit dem GTR bestimmt, zentrale Werkzeugkompetenz in diesem Unterrichtsvorhaben ist die Interpretation des angezeigten Lösungsvektors bzw. der reduzierten Matrix. Die

Die Schülerinnen und Schüler • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen	Vernetzung der geometrischen Vorstellung (Lagebeziehung) und der algebraischen Formalisierung sollte stets deutlich werden.

Thema: *Eine Sache der Logik und der Begriffe: Untersuchung von Lagebeziehungen (Q-GK-G3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lagebeziehungen zwischen zwei Geraden […] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober- / Unterbegriff) *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige / hinreichende Bedingung, Folgerungen / Äquivalenz, Und- / Oder-Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)* • verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*	*Hinweis: Bei zweidimensionalen Abbildungen (z. B. Fotografien) räumlicher Situationen geht in der Regel die Information über die Lagebeziehung von Objekten verloren. Verfeinerte Darstellungsweisen (z. B. unterbrochene Linien, schraffierte Flächen, gedrehtes Koordinatensystem) helfen, dies zu vermeiden und Lagebeziehungen systematisch zu untersuchen.* Der Fokus der Untersuchung von Lagebeziehungen liegt auf dem logischen Aspekt einer vollständigen Klassifizierung sowie einer präzisen Begriffsbildung (z. B. Trennung der Begriffe „parallel“, „echt parallel“, „identisch“). Flussdiagramme und Tabellen können ein geeignetes Mittel sein, solche Algorithmen darzustellen. Es werden möglichst selbstständig solche Darstellungen entwickelt, die z.B. auf Lernplakaten dokumentiert, präsentiert, verglichen und hinsichtlich ihrer Brauchbarkeit beurteilt werden können. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollen nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden. Eine analoge Bearbeitung der in Q-GK-G2 erarbeiteten Beziehungen zwischen Geraden und Ebenen bietet sich an. *Als Kontext kann dazu die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Q-GK-G1 wieder aufgegriffen werden. Dabei wird evtl. die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten relevant. Bei genügend zur Verfügung stehender Zeit oder binnendifferenziert könnte (über den Kernlehrplan hinausgehend) das Abstandsminimum numerisch, grafisch oder algebraisch mit den Verfahren der Analysis ermittelt werden.* *Begrifflich davon abgegrenzt wird der Abstand zwischen den Flugbahnen. Dies motiviert die Beschäftigung mit orthogonalen Hilfsgeraden (Q-GK-G4).*

Thema: *Räume vermessen – mit dem Skalarprodukt Polygone und Polyeder untersuchen (Q-GK-G4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, […]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). *Bei hinreichend zur Verfügung stehender Zeit kann in Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes, vgl. Q-GK-G3) entdeckt werden, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. als Streckenlänge über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Bei dieser Problemstellung sollten unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen werden.* Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. *Dabei kann z. B. der Nachweis von Dreiecks- bzw. Viereckstypen (anknüpfend an das Thema E-G2) wieder aufgenommen werden.* Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-GK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird z. B. durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-GK-S2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • beschreiben den Einfluss der Parameter *n* und *p* auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich ausgewählte Spielsituationen (z.B. Würfeln einer Sechs), die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests und das Galtonbrett bzw. seine Simulation an. Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet. Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von *n* und *p* ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen. *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf*

… Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)	*stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten. Dennoch sollte die Arbeit mit Tabellenwerken aus Formelsammlung bzw. Lehrbuch exemplarisch vorgestellt und erläutert werden.*

Thema: *Modellieren mit Binomialverteilungen (Q-GK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen • schließen anhand einer vorgegebenen Entscheidungsregel aus einem Stichprobenergebnis auf die Grundgesamtheit **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter […] Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*	In verschiedenen Sachkontexten wird zunächst die Möglichkeit einer Modellierung der Realsituation mithilfe der Binomialverteilung überprüft. Die Grenzen des Modellierungsprozesses werden aufgezeigt und begründet. In diesem Zusammenhang werden geklärt: - die Beschreibung des Sachkontextes durch ein Zufallsexperiment - die Interpretation des Zufallsexperiments als Bernoullikette - die Definition der zu betrachtenden Zufallsgröße - die Unabhängigkeit der Ergebnisse - die Benennung von Stichprobenumfang *n* und Trefferwahrscheinlichkeit *p* Dies erfolgt in unterschiedlichsten Realkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). Prüfverfahren mit vorgegebenen Entscheidungsregeln bieten einen besonderen Anlass, um von einer (ein- oder mehrstufigen) Stichprobenentnahme aus einer Lieferung auf nicht bekannte Parameter in der Grundgesamtheit zu schließen. *Wenn genügend Unterrichtszeit zur Verfügung steht, können im Rahmen der beurteilenden Statistik vertiefend (und über den Kernlehrplan hinausgehend) Produzenten- und Abnehmerrisiken bestimmt werden.* *Hinweis: Eine Stichprobenentnahme kann auch auf dem GTR simuliert werden.*

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (G-GK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*	*Hinweis:* *Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Optimierungsprobleme (Q-LK-A1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese
verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten
bilden die Ableitungen weiterer Funktionen
Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten
führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück
wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an
Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)
beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)</td><td>Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“

Das Aufstellen der Funktionsgleichungen fördert Problemlösestrategien. Die Lernenden sollten deshalb hinreichend Zeit bekommen, z.B. mit Methoden des kooperativen Lernens selbstständig zu Zielfunktionen zu kommen und dabei unterschiedliche Lösungswege zu entwickeln.

An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“).

Ein Verpackungsproblem (Dose oder Milchtüte) sollte unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht werden.

Stellen extremaler Steigung eines Funktionsgraphen werden im Rahmen geeigneter Kontexte (z. B. Neuverschuldung und Schulden oder Besucherströme in einen Freizeitpark/zu einer Messe und erforderlicher Personaleinsatz) thematisiert und dabei der zweiten Ableitung eine anschauliche Bedeutung als Zu- und Abnahmerate der Änderungsrate der Funktion verliehen. Die Bestimmung der extremalen Steigung kann zunächst über das Vorzeichenwechselkriterium (an den Nullstellen der zweiten Ableitung) erfolgen, dies möglichst nicht punktuell, sondern für Intervalle.</td></tr>
</table>

• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern …) *(Lösen)* • setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)* • berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	Im Zusammenhang mit geometrischen oder ökonomischen Kontexten entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Wurzelfunktionen sowie die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an.

Thema: *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q-LK-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden in unterschiedlichen Kontexten (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkten, Symmetrieüberlegungen, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (z.B. Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen.

• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen	*Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.* Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ können Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht werden. *Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig über die Spline-Interpolation forschen und referieren zu lassen.*

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)* • wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)* • dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)* • erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*	*Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau. Deshalb hat sich die Fachkonferenz für einen ähnlichen Einstieg in die Integralrechnung im Leistungskurs entschieden wie im Grundkurs. Er unterscheidet sich allenfalls durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs.* Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb werden hier Kontexte, die schon dort genutzt werden, wieder aufgegriffen (z.B.: Geschwindigkeit - Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen (kurz) sollten die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Qualitativ könnten die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren.

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-LK-A4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale numerisch […] • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion • bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Vermutungen auf *(Vermuten)* • unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)* • erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)*	Schülerinnen und Schüler können hier selbst entdecken, dass die Integralfunktion J_a eine Stammfunktion der Randfunktion ist. Dazu wird das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben entwickelte numerische Näherungsverfahren zur Rekonstruktion einer Größe aus der Änderungsrate auf eine kontextfrei durch einen Term gegebene Funktion angewendet und zur Konstruktion der Integralfunktion genutzt (Verallgemeinerung). Die Graphen der Randfunktion und der genäherten Integralfunktion können die Schülerinnen und Schüler z.B. mit Hilfe einer Tabellenkalkulation und eines Funktionenplotters gewinnen, vergleichen und Beziehungen zwischen diesen herstellen. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Um diesen Zusammenhang zu begründen, kann der absolute Zuwachs $J_a(x+h) - J_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt werden. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang kann als Anlass genutzt werden, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren, und motivieren, die Voraussetzungen zu präzisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. *Hier bieten sich Möglichkeiten zur inneren Differenzierung: Formalisierung der Schreibweise bei der Summenbildung, exemplarische Einschachtelung mit Ober- und Untersummen, formale Grenzwertbetrachtung, Vergleich der Genauigkeit unterschiedlicher Abschätzungen.* In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung.

• überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals	Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. (Gedanklich wird mit einem „Eierschneider“ der Rotationskörper in berechenbare Zylinder zerlegt, analog den Rechtecken oder Trapezen bei der Flächenberechnung. Auch die jeweiligen Summenformeln weisen Entsprechungen auf.) Mit der Mittelwertberechnung kann bei entsprechend zur Verfügung stehender Zeit (über den Kernlehrplan hinausgehend) noch eine weitere wichtige Grundvorstellung des Integrals erarbeitet werden. Hier bieten sich Vernetzungen mit dem Inhaltsfeld Stochastik an.

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion
• nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion
• bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
    ○ natürliche Exponentialfunktion
    ○ Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis
    ○ natürliche Logarithmusfunktion
• nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \rightarrow 1/x$.
 	
Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
• erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
• entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
• nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme)*(Lösen)*
• führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*
• variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)*
 	
Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
… grafischen Messen von Steigungen
	Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen.
	
	Im Anschluss werden die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen.
	Die Eulersche Zahl kann z. B. über das Problem der stetigen Verzinsung. eingeführt werden. Der Grenzübergang kann dabei zunächst durch den GTR unterstützt werden. Da der Rechner dabei numerisch an seine Grenzen stößt, wird aber auch eine Auseinandersetzung mit dem Grenzwertbegriff motiviert.
	Die Frage nach der Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate.
	
	Umgekehrt wird zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle gesucht.
	
	Dazu kann man eine Wertetabelle des Differenzenquotienten aufstellen, die immer weiter verfeinert wird. Oder man experimentiert in der Grafik des GTR, indem Tangenten an verschiedenen Stellen an die Funktion gelegt werden.
	
	Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich automatisch, dass für die Eulersche Zahl als Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.
	
	Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu

• entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus • nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen	definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden. Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion kann z. B. graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen werden.

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • bestimmen Integrale […] mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*	Als Beispiel für eine Summenfunktion eignet sich die Modellierung einer Kettenlinie. An mindestens einem Beispiel wird auch ein beschränktes Wachstum untersucht. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik können ggf. aufgegriffen werden (z. B. Gaußsche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).

<table>
<tr><td colspan="2">Thema: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-LK-G1)</td></tr>
<tr><td>Zu entwickelnde Kompetenzen</td><td>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</td></tr>
<tr><td>Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler
• stellen Geraden in Parameterform dar
• interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
• stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
• erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
• treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor (Strukturieren)
• übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
• erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
• beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung (Validieren)
• verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung (Validieren)

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler</td><td>Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und z. B. dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden.
Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit mittels einer Funktion zu variieren, z. B. zur Beschreibung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung.

Weiterhin kann der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (hier die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs werden Strahlen und Strecken einbezogen. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen erlauben die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen. Solche Darstellungen sollten geübt werden.

Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden. Der Einsatz der DGS bietet die zusätzliche</td></tr>
</table>

• nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden … Darstellen von Objekten im Raum	Möglichkeit, dass der Ort der Strahlenquelle variiert werden kann. Inhaltlich schließt die Behandlung von Schrägbildern an das Thema E-G1 an.

Thema: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden [...] **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*	Das Skalarprodukt kann zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt werden. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt. Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produktes von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z. B. Division durch einen Vektor) gestellt. Anknüpfend an das Thema E-G2 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarproduktes untersucht. Dabei bieten sich vorrangig Problemlöseaufgaben (z. B. Nachweis von Viereckstypen) an. In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.

Thema: *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G3)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>

Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

- stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Prozessbezogene Kompetenzen:
Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)*
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)*
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*

</td><td>

Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an Q-LK-G2 anknüpfender Weg als eine Möglichkeit vorgeschlagen:

Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ($\vec{a} = 0$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden z.B. in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen kann z.B. eine räumliche Geometriesoftware verwendet werden.

Als weitere Darstellungsform kann nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt werden. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Diese bildet ein schiefwinkliges Koordinatensystem in der Ebene. Damit kann die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G2 wieder aufgegriffen werden. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs können Parallelogramme und Dreiecke beschrieben werden. So könnten exemplarisch auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden.

Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ kann ein

</td></tr>
</table>

	Normalenvektor mit Hilfe des Vektorprodukts oder eines Gleichungssystems bestimmt.

Thema: *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)*

<table>
<tr><th>Zu entwickelnde Kompetenzen</th><th>Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen</th></tr>
<tr><td>
Inhaltsbezogene Kompetenzen:
Die Schülerinnen und Schüler

interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden […]
berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext
bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen

Prozessbezogene Kompetenzen:
Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler

präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur (Vermuten)
stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) (Begründen)
nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen (Begründen)
berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) (Begründen)
überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (Beurteilen)

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler

erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen (Rezipieren)
verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang (Produzieren)
wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen (Produzieren)

</td><td>
Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen.

Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an.

Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen.

In der Rückschau sollten die Schüler nun einen Algorithmus entwickeln, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden. Flussdiagramme und Tabellen sind Möglichkeiten, solche Algorithmen darzustellen.
</td></tr>
</table>

• erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)* • vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*	

Thema: *Untersuchungen an Polyedern (Q-LK-G5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)* • wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*	Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden. Hier kann eine räumliche Geometriesoftware eingesetzt werden. Wo möglich, können auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt werden. Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-LK-G2 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von Punkten zu Geraden (Q-LK-G2) und zu Ebenen (Q-LK-G3) ermöglichen es z. B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Abgesehen von der Abstandsberechnung zwischen Geraden (erst in Q-LK-G5) müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden. Das Gauß-Verfahren kann anknüpfend an das Thema Q-LK-A2 im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft werden. In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben.

Werkzeuge nutzen *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen … Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen	

Thema: *Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q-LK-G6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler*	*Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.* Deshalb beschließt die Fachkonferenz, Problemlösungen mit den prozessbezogenen Zielen zu verbinden, 1) eine planerische Skizze anzufertigen und die gegebenen geometrischen Objekte abstrakt zu beschreiben, 2) geometrische Hilfsobjekte einzuführen, 3) an geometrischen Situationen Fallunterscheidungen vorzunehmen, 4) bekannte Verfahren zielgerichtet einzusetzen und in komplexeren Abläufen zu kombinieren, 5) unterschiedliche Lösungswege Kriterien gestützt zu vergleichen. Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug des GTR zurückgreifen, jedoch steht dieser Teil der Lösung hier eher im Hintergrund und soll sogar bei aufwändigeren Problemen bewusst ausgeklammert werden. Bei Beweisaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und ggf. selbst vornehmen. Dabei spielt auch die Entdeckung einer Gesetzmäßigkeit – ggf. mit Hilfe von DGS – eine Rolle. Geeignete Beispiele bieten der Satz von Varignon oder der Sehnen-(Tangenten-) satz von Euklid.

• wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen)* • führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)* • vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)* • beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)* • analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)* • variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)*	Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar zur Abiturvorbereitung überleitet bzw. zum Zweck der Abiturvorbereitung noch einmal wiederaufgenommen werden soll.

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird exemplarisch verdeutlicht oder durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Varianz (als mittlere quadratische Abweichung) und der Standardabweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; über gezielte Veränderungen der Verteilung wird ein Gefühl für die Auswirkung auf deren Kenngrößen entwickelt. Anschließend werden diese Größen zum Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen und zu einfachen Risikoabschätzungen genutzt.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente • erklären die Binomialverteilung einschließlich der kombinatorischen Bedeutung der Binomialkoeffizienten und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […] • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und der Binomialkoeffizienten bieten sich ausgewählte Spielsituationen (z.B. Würfeln einer Sechs), die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests und das Galtonbrett (bzw. seine Simulation) an. Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf vielfältigen Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation“). *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten. Dennoch sollte die Arbeit mit Tafelwerken in Formelsammlung bzw. Lehrbuch exemplarisch vorgestellt und erläutert werden.*

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)* • wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)* • interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)* ***Werkzeuge nutzen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

• verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Variieren der Parameter von Binomialverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen … Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung) … Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen	

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)* • reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)* ***Problemlösen*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)* • entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)* • wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)* ***Werkzeuge nutzen***	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Ein sinnvoller Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben ist z.B. über die Untersuchung von Summenverteilungen möglich. Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm werden z.B. die Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln simuliert, wobei in der grafischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. *Ergänzung für leistungsfähige Kurse:* Gut geeignet ist auch die Simulation von Stichprobenmittelwerten aus einer (gleichverteilten) Grundgesamtheit. Verschiedene handlungsorientierte Zugänge bieten Anlass, mit den Parametern des Mittelwertes μ und der Streuung σ zu experimentieren. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

Die Schülerinnen und Schüler • verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum … Generieren von Zufallszahlen … Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufalls-größen • nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen • entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen • reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge	

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)* • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)* • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)* • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)* ***Kommunizieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)* • formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)* • führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests kann dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände) **Prozessbezogene Kompetenzen:** ***Modellieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren) • übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren) • erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren) • beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren) ***Argumentieren*** *Die Schülerinnen und Schüler* • präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)* • nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)* • stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)* • überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an. Eine nicht obligatorische Vertiefungsmöglichkeit besteht darin, Ausgangszustände über ein entsprechendes Gleichungssystem zu ermitteln und zu erfahren, dass der GTR als Hilfsmittel dazu die inverse Matrix bereitstellt.

2.2 Grundsätze der Leistungsbewertung

Die Grundsätze der Leistungsbewertung werden regelmäßig auf den Fachkonferenzen diskutiert und ggf. angepasst.

Auf der Grundlage von § 48 SchulG, § 13 APO-GOSt sowie Kapitel 3 des Kernlehrplans Mathematik hat die Fachkonferenz im Einklang mit dem entsprechenden schulbezogenen Konzept die nachfolgenden Grundsätze zur Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung beschlossen. Die nachfolgenden Absprachen stellen die Minimalanforderungen an das lerngruppenübergreifende gemeinsame Handeln der Fachgruppenmitglieder dar. Bezogen auf die einzelne Lerngruppe kommen ergänzend weitere der in den Folgeabschnitten genannten Instrumente der Leistungsüberprüfung zum Einsatz.

Verbindliche Absprachen:

- Die Aufgaben für Klausuren in parallelen Grund- bzw. Leistungskursen werden im Vorfeld abgesprochen und nach Möglichkeit gemeinsam gestellt.
- Klausuren können nach entsprechender Wiederholung im Unterricht auch Aufgabenteile enthalten, die Kompetenzen aus weiter zurückliegenden Unterrichtsvorhaben oder übergreifende prozessbezogene Kompetenzen erfordern.
- Alle Klausuren in der Q-Phase enthalten auch Aufgaben mit Anforderungen im Sinne des Anforderungsbereiches III (vgl. Kernlehrplan Kapitel 4).
- Alle Klausuren in der Sekundarstufe II beinhalten einen hilfsmittelfreien Teil. Im weiteren Teil der Klausuren dürfen der grafikfähige Taschenrechner und eine Formelsammlung genutzt werden.
- Für die Aufgabenstellung der Klausuraufgaben werden die Operatoren der Aufgaben des Zentralabiturs verwendet. Diese sind mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen.
- Schülerinnen und Schülern wird in allen Kursen Gelegenheit gegeben, mathematische Sachverhalte zusammenhängend (z. B. eine Hausaufgabe, einen fachlichen Zusammenhang, einen Überblick über Aspekte eines Inhaltsfeldes usw.) selbstständig vorzutragen.

Die Bewertungskriterien für eine Leistung müssen den Schülerinnen und Schülern transparent und klar sein. Die Fachkonferenz legt allgemeine Kriterien fest, die sowohl für die schriftlichen als auch für die sonstigen Formen der Leistungsüberprüfung gelten. Dazu gehört auch die Darstellung der Erwartungen für eine gute und für eine ausreichende Leistung

2.2.1 Überprüfung der schriftlichen Leistung

- **Einführungsphase:** Zwei Klausuren je Halbjahr, davon eine (in der Regel die vierte Klausur in der Einführungsphase) als landeseinheitlich zentral gestellte Klausur. Dauer der Klausuren: 90 Minuten
- **Grundkurse Q-Phase Q 1.1 – Q 1.2:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 90 Minuten in Q1.1 / 135 Minuten in Q1.2
- **Grundkurse Q-Phase Q 2.1:**
Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 180 Minuten
- **Grundkurse Q-Phase Q 2.2:**
Eine Klausur unter Abiturbedingungen für Schülerinnen und Schüler, die Mathematik als drittes Abiturfach gewählt haben. Dauer der Klausur: 225 Minuten
- **Leistungskurse Q-Phase Q 1.1 – Q 1.2:** Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 135 Minuten in Q1.1 / 180 Minuten in Q1.2
- **Leistungskurse Q-Phase Q 2.1:**
Zwei Klausuren je Halbjahr. Dauer der Klausuren: 225 Minuten
- **Leistungskurse Q-Phase Q 2.2:**
Eine Klausur unter Abiturbedingungen. Dauer der Klausur: 270 Minuten
- **Facharbeit:** Gemäß Beschluss der Lehrerkonferenz kann die erste Klausur Q1.2 für diejenigen Schülerinnen und Schüler, die eine Facharbeit im Fach Mathematik schreiben, durch diese ersetzt werden.

Kriterien für die Überprüfung der schriftlichen Leistung

Die Bewertung der schriftlichen Leistungen in Klausuren erfolgt über ein Raster mit Hilfspunkten, die im Erwartungshorizont den einzelnen Kriterien zugeordnet sind. Dabei sind in der Qualifikationsphase alle Anforderungsbereiche zu berücksichtigen, wobei der Anforderungsbereich II den Schwerpunkt bildet.

Die Zuordnung der Hilfspunktsumme zu den Notenstufen orientiert sich in der Einführungsphase an der zentralen Klausur und in der Qualifikationsphase am Zuordnungsschema des Zentralabiturs. Die Note ausreichend soll bei Erreichen von ca. 50% der Hilfspunkte erteilt werden. Von den genannten Zuordnungsschemata kann im Einzelfall begründet abgewichen werden, wenn sich z. B. besonders originelle Teillösungen nicht durch Hilfspunkte gemäß den Kriterien des Erwartungshorizontes abbilden lassen oder eine Abwertung wegen besonders schwacher Darstellung (APO-GOSt §13 (2)) angemessen erscheint.

Die Tabelle zeigt die Notengrenzen, die für schriftliche Abfragen in der **Sekundarstufe II** gelten.

Diese stellen eine verbindliche Orientierung für die Lehrenden dar, trotzdem kann in begründeten Fällen eine geringfügige Verschiebung der Grenzen vorgenommen werden.

Sek II			
%	Punkte	Note	
ab 95	15	1+	
ab 90	14		1
ab 85	13	1-	
ab 80	12	2+	
ab 75	11		2
ab 70	10	2-	
ab 65	9	3+	
ab 60	8		3
ab 55	7	3-	
ab 50	6	4+	
ab 45	5		4
ab 40	4	4-	
ab 33	3	5+	
ab 26	2		5
ab 20	1	5-	
0	0		6

2.2.2 Überprüfung der sonstigen Leistung

In die Bewertung der sonstigen Mitarbeit fließen folgende Aspekte ein, die den Schülerinnen und Schülern bekanntgegeben werden müssen:

- Beteiligung am Unterrichtsgespräch (Quantität und Kontinuität)
- Qualität der Beiträge (inhaltlich und methodisch)
- Eingehen auf Beiträge und Argumentationen von Mitschülerinnen und -schülern, Unterstützung von Mitlernenden
- Umgang mit neuen Problemen, Beteiligung bei der Suche nach neuen Lösungswegen
- Selbstständigkeit im Umgang mit der Arbeit
- Umgang mit Arbeitsaufträgen (Hausaufgaben, Unterrichtsaufgaben…)
- Anstrengungsbereitschaft und Konzentration auf die Arbeit
- Beteiligung während kooperativer Arbeitsphasen
- Darstellungsleistung bei Referaten oder Plakaten und beim Vortrag von Lösungswegen
- Ergebnisse schriftlicher Übungen
- Anfertigen zusätzlicher Arbeiten, z. B. eigenständige Ausarbeitungen im Rahmen binnendifferenzierender Maßnahmen, Erstellung von Computerprogrammen

Kriterien für die Überprüfung der sonstigen Leistungen

Im Fach Mathematik ist in besonderem Maße darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler zu konstruktiven Beiträgen angeregt werden. Daher erfolgt die Bewertung der sonstigen Mitarbeit nicht defizitorientiert oder ausschließlich auf fachlich richtige Beiträge ausgerichtet. Vielmehr bezieht sie Fragehaltungen, begründete Vermutungen, sichtbare Bemühungen um Verständnis und Ansatzfragmente mit in die Bewertung ein.

Im Folgenden werden Kriterien für die Bewertung der sonstigen Leistungen jeweils für eine gute bzw. eine ausreichende Leistung dargestellt. Dabei ist bei der Bildung der Quartals- und Abschlussnote jeweils die Gesamtentwicklung der Schülerin bzw. des Schülers zu berücksichtigen, eine arithmetische Bildung aus punktuell erteilten Einzelnoten erfolgt nicht:

	Anforderungen für eine	
Leistungsaspekt	**gute Leistung**	**ausreichende Leistung**
	Die Schülerin, der Schüler	
Qualität der Unterrichtsbeiträge	nennt richtige Lösungen und begründet sie nachvollziehbar im Zusammenhang der Aufgabenstellung	nennt teilweise richtige Lösungen, in der Regel jedoch ohne nachvollziehbare Begründungen
	geht selbstständig auf andere Lösungen ein, findet Argumente und Begründungen für ihre/seine eigenen Beiträge	geht selten auf andere Lösungen ein, nennt Argumente, kann sie aber nicht begründen
	kann ihre/seine Ergebnisse auf unterschiedliche Art und mit unterschiedlichen Medien darstellen	kann ihre/seine Ergebnisse nur auf eine Art darstellen
Kontinuität/Quantität	beteiligt sich regelmäßig am Unterrichtsgespräch	nimmt eher selten am Unterrichtsgespräch teil
Selbstständigkeit	bringt sich von sich aus in den Unterricht ein	beteiligt sich gelegentlich eigenständig am Unterricht
	ist selbstständig ausdauernd bei der Sache und erledigt Aufgaben gründlich und zuverlässig	benötigt oft eine Aufforderung, um mit der Arbeit zu beginnen; arbeitet Rückstände nur teilweise auf
	strukturiert und erarbeitet neue Lerninhalte weitgehend selbstständig, stellt selbstständig Nachfragen	erarbeitet neue Lerninhalte mit umfangreicher Hilfestellung, fragt diese aber nur selten nach
	erarbeitet bereitgestellte Materialien selbstständig	erarbeitet bereitgestellte Materalien eher lückenhaft
Hausaufgaben	erledigt sorgfältig und vollständig die Hausaufgaben	erledigt die Hausaufgaben weitgehend vollständig, aber teilweise oberflächlich

	trägt Hausaufgaben mit nachvollziehbaren Erläuterungen vor	nennt die Ergebnisse, erläutert erst auf Nachfragen und oft unvollständig
Kooperation	bringt sich ergebnisorientiert in die Gruppen-/Partnerarbeit ein	bringt sich nur wenig in die Gruppen-/Partnerarbeit ein
	arbeitet kooperativ und respektiert die Beiträge Anderer	unterstützt die Gruppenarbeit nur wenig, stört aber nicht
Gebrauch der Fachsprache	wendet Fachbegriffe sachangemessen an und kann ihre Bedeutung erklären	versteht Fachbegriffe nicht immer, kann sie teilweise nicht sachangemessen anwenden
Werkzeuggebrauch	setzt Werkzeuge im Unterricht sicher bei der Bearbeitung von Aufgaben und zur Visualisierung von Ergebnissen ein	benötigt häufig Hilfe beim Einsatz von Werkzeugen zur Bearbeitung von Aufgaben
Präsentation/Referat	präsentiert vollständig, strukturiert und gut nachvollziehbar	präsentiert an mehreren Stellen eher oberflächlich, die Präsentation weist Verständnislücken auf
Schriftliche Übung	ca. 75% der erreichbaren Punkte	ca. 50% der erreichbaren Punkte

Beschreibung der Notenbereiche (Ausschärfung)
Sehr gut: Die Leistungen entsprechen den Anforderungen in besonderem Maße. gleichmäßig hohe und selbständige Mitarbeit im Unterricht; sachgerechte und ausgewogene Beurteilungen; eigenständige gedankliche Leistung als Beitrag zur Problemlösung; angemessene und richtige Verwendung von neu erlernten Fachbegriffen; vermittelte Fachkenntnisse / Methoden / Verfahren werden sicher beherrscht und angewendet; fristgerechte Abgabe von Aufgaben

Gut: Die Leistungen entsprechen den Anforderungen voll.
überwiegend gleichmäßig hohe und selbständige Mitarbeit im Unterricht; Verständnis schwieriger Sachverhalte; Fähigkeit zur Problemerkennung und Lösung; sachgerechte und angemessene Verwendung von neu erlernten Fachbegriffen; vermittelte Fachkenntnisse / Methoden / Verfahren werden beherrscht und angewendet; fristgerechte Abgabe der Aufgaben

Befriedigend: Die Leistungen entsprechen den Anforderungen im Allgemeinen.
insgesamt regelmäßig freiwillige Mitarbeit im Unterricht; richtige Wiedergabe einfacher Fakten und Zusammenhänge aus dem unmittelbar behandelten Stoffgebiet; grundsätzlich angemessene Anwendung erlernter Inhalte; vermittelte Fachkenntnisse / Methoden / Verfahren werden überwiegend beherrscht und angewendet; gelegentlich

selbständige Anwendung von neu erlernten Fachbegriffen; weitgehend fristgerechte Abgabe von Aufgaben

Ausreichend: Die Leistungen weisen zwar Mängel auf, entsprechen aber im Ganzen noch den Anforderungen (bzw. entsprechen den Anforderungen nur noch mit Einschränkungen).
nur gelegentlich freiwillige Mitarbeit im Unterricht; überwiegend richtige Wiedergabe einfacher Fakten und Zusammenhänge aus dem unmittelbar behandelten Stoffgebiet; vermittelte Fachkenntnisse / Methoden / Verfahren werden mit Einschränkungen beherrscht; weitgehend fristgerechte Abgabe von Aufgaben

Mangelhaft: Die Leistungen entsprechen den Anforderungen nicht, lassen jedoch erkennen, dass die notwendigen Grundkenntnisse vorhanden sind und die Mängel in absehbarer Zeit behoben werden können.
überwiegend passives Verhalten im Unterricht; Äußerungen nach Aufforderung sind nur teilweise richtig; eingeschränkte, z.T. unzureichende Fähigkeit der Umsetzung von erlernten mathematischen Inhalten; sehr lückenhafte Sach- und Methodenkompetenz; verzögerte Abgabe der Arbeiten

Ungenügend: Die Leistungen entsprechen den Anforderungen nicht und selbst die Grundkenntnisse sind so lückenhaft, dass die Mängel in absehbarer Zeit nicht behoben werden können.
keine freiwillige Mitarbeit im Unterricht; Äußerungen nach Aufforderung sind falsch; SuS nicht zu motivieren; völlig verfehlte Lösungsversuche verschiedenster Aufgabenstellungen; keine Abgabe von Arbeiten

2.3 Lehr- und Lernmittel

In der Sekundarstufe II wird das Lehrwerk „Elemente der Mathematik“ vom Westermann-Verlag genutzt.

Je nach Thema empfehlen die Lehrkräfte den Schülerinnen und Schülern geeignete Arbeitshefte. Die Anschaffung einer Formelsammlung ist für alle Schülerinnen und Schüler verpflichtend, und der Umgang damit wird im Unterricht geschult. Die Formelsammlung wird ab dem SJ 2024/2025 zentral vom HVG bestellt und ist eine math.-naturwissenschaftliche Formelsammlung des IQB.

Im Unterricht und in den Klausuren wird ab dem SJ 2024/2025 die CAS-Technologie verwendet. Dabei verwenden wir am HVG die TI-Handheld-Geräte oder alternativ die TI-App, die in auf allen iOS-Geräten verfügbar ist.

Zusätzliche digitale Lernmittel, z.B. GeoGebra und Excel, werden situativ angemessen eingesetzt. Weiterhin können die Schülerinnen und Schüler im Unterricht ein eigenes Tablet nutzen.

3 Fachübergreifende und außerunterrichtliche Aktivitäten

Das Hermann-Vöchting-Gymnasium ist als MINT-EC-Schule zertifiziert, so dass sich eine enge Verzahnung zwischen dem Mathematikunterricht und dem Unterricht in den Naturwissenschaften sowie Informatik ergibt. Der besonderen Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften soll dadurch Rechnung getragen werden, dass die Erkenntnis von Zusammenhängen mathematisiert werden kann. Im Bereich der mathematischen Modellierung von Sachverhalten werden die naturwissenschaftlichen Modelle als Grundlage für sinnvolle Modellannahmen verdeutlicht (z.B. Exponentialfunktionen).
Die Fachschaft Mathematik fördert intensiv die Teilnahme der Schülerinnen und Schüler an Wettbewerben (Känguru-Wettbewerb, Mathematikolympiade, Bundeswettbewerb der Mathematik). Weiterhin versucht die Fachschaft Projekttage für interessierte Schülerinnen und Schüler anzubieten, z.B. die „Lange Nacht der Mathematik“.
Weitere fachübergreifende Unterrichtsprojekte und der Besuch von außerschulischen Lernorten finden nach Absprache statt. Viele Klassen nutzen z.B. die Möglichkeit das „Phaeno“ in Wolfsburg zu besuchen, wo sowohl mathematische als auch naturwissenschaftliche Erkenntnisse anhand eigener Experimente erworben werden können.

4 Qualitätssicherung und Evaluation

Die Fachschaft Mathematik setzt sich zum Ziel, den Unterricht an unserem Gymnasium zu verbessern und weiterzuentwickeln.
Ein hohes Maß an Qualität wird durch den regelmäßigen Austausch über durchgeführte Unterrichtsvorhaben sowie die gemeinsame Konzeption von Unterrichtsmaterialien, welche hierdurch mehrfach erprobt und bezüglich ihrer Wirksamkeit beurteilt und optimiert werden, gesichert. Häufig werden auch Klassenarbeiten gemeinsam konzipiert.
Die Fachkonferenzen werden kontinuierlich genutzt, um die fachlichen und didaktischen Konzepte zu diskutieren und ggf. anzupassen.
Wiederholt finden Fortbildungen der gesamten Fachschaft zu aktuellen Themen statt, z.B. kompetenzorientierten Aufgaben, Digitalisierung usw.
Feedback von Schülerinnen und Schülern wird als wichtige Informationsquelle zur Qualitätsentwicklung des Unterrichts angesehen. Sie sollen deshalb Gelegenheit bekommen, die Qualität des Unterrichts zu evaluieren.